PART2　不等式の証明

2　[1]　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。ただし，使われている文字はすべて実数とする。

(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

(2)　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

[2]　x，y を実数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$|x|-|y| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$$

Point Pickup

[1]　(1)　実数 A について　$A^2 \geqq 0$（等号成立は $A=0$ のとき）

(2)　実数 A，B について　$A^2+B^2 \geqq 0$（等号成立は $A=B=0$ のとき）

[2]　$A \geqq 0$，$B \geqq 0$ のとき　　$A \geqq B \iff A^2 \geqq B^2$

また　$A>0$ のとき　$|A|=A$，$|A|>-A$

$A=0$ のとき　$|A|=A=-A$

$A<0$ のとき　$|A|=-A$，$|A|>A$

よって　$|A| \geqq A$，$|A| \geqq -A$

第２講　PART2　確認問題

次の不等式を証明せよ。ただし，使われている文字はすべて実数とし，選択肢は最も適切なものを選べ。

1　$(x^8+y^8)(x^6+y^6) \geqq (x^7+y^7)^2$

（証明）

$(x^8+y^8)(x^6+y^6)-(x^7+y^7)^2$

$=x^{\boxed{アイ}}+x^8y^6+x^6y^8+y^{\boxed{アイ}}$

$\qquad -(x^{\boxed{ウエ}}+2x^7y^7+y^{\boxed{ウエ}})$

$=(x^3)^{\boxed{オ}}(y^3)^{\boxed{カ}}(x-y)^{\boxed{キ}} \geqq \boxed{ク}$

よって　$(x^8+y^8)(x^6+y^6) \geqq (x^7+y^7)^2$

2 $a^2+b^2+c^2 \geqq -ab-bc-ca$

（証明）

$a^2+b^2+c^2-(-ab-bc-ca)$

$=a^2+(b+c)a+b^2+bc+c^2$

$=\boxed{ケ}-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2+b^2+bc+c^2$

$=\boxed{ケ}+\dfrac{3}{4}\boxed{コ}+\dfrac{2}{3}\boxed{サ} \geqq \boxed{シ}$

よって　$a^2+b^2+c^2 \geqq -ab-bc-ca$

[ケ の選択肢]

① $(a+b+c)^2$　　② $(a-b-c)^2$

③ $\left(a+\dfrac{b+c}{2}\right)^2$　　④ $\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2$

[コ の選択肢]

① $(b+c)^2$　　② $(b-c)^2$

③ $\left(b+\dfrac{c}{3}\right)^2$　　④ $\left(b-\dfrac{c}{3}\right)^2$

[サ の選択肢]

① c　　② c^2　　③ bc

3 $|x|-|y| \leqq |x-y| \leqq |x|+|y|$

（証明）

$|x-y| \leqq |x|+|y|$ を示す。

$$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$$
$$=|x|^2+\boxed{\text{ス}}+|y|^2-\left(x^2-\boxed{\text{セ}}+y^2\right)$$
$$=\boxed{\text{ソ}} \geqq \boxed{\text{タ}}$$

よって　$|x-y|^2 \leqq (|x|+|y|)^2$

$|x-y| \geqq 0$，$|x|+|y| \geqq 0$ であるから

$$|x-y| \leqq |x|+|y|$$

次に，$|x|-|y| \leqq |x-y|$ を示す。

(i)　$|x|-|y| \geqq 0$ のとき

$$|x-y|^2-(|x|-|y|)^2$$
$$=\left(x^2-\boxed{\text{セ}}+y^2\right)-\left(|x|^2-\boxed{\text{チ}}+|y|^2\right)$$
$$=\boxed{\text{ツ}} \geqq \boxed{\text{テ}}$$

よって　$(|x|-|y|)^2 \leqq |x-y|^2$

$|x|-|y| \geqq 0$，$|x-y| \geqq 0$ であるから

$$|x|-|y| \leqq |x-y|$$

(ii)　$|x|-|y| < 0$ のとき

$|x-y| \geqq 0$ であるから　$|x|-|y| < |x-y|$

(i)，(ii)より　$|x|-|y| \leqq |x-y|$

以上から　$|x|-|y| \leqq |x-y| \leqq |x|+|y|$

[$\boxed{\text{ス}}$〜$\boxed{\text{ソ}}$，$\boxed{\text{チ}}$，$\boxed{\text{ツ}}$ の選択肢]

①　$(x+y)^2$　　②　$(x-y)^2$

③　$2xy$　　④　$2|x||y|$

⑤　$x+y$　　⑥　$|x|+|y|$

⑦　$2(|xy|+xy)$　　⑧　$2(|xy|-xy)$

⑨　$2(xy-|xy|)$

PART2　不等式の証明

2　[1]　次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。ただし，使われている文字はすべて実数とする。

(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

(2)　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

[2]　x，y を実数とするとき，次の不等式を証明せよ。

$$|x|-|y| \leqq |x+y| \leqq |x|+|y|$$

[1]　(1)　$(a^2+b^2)(x^2+y^2)-(ax+by)^2$

$=a^2x^2+a^2y^2+b^2x^2+b^2y^2-a^2x^2-2abxy-b^2y^2$

$=a^2y^2-2abxy+b^2x^2$

$=(ay-bx)^2 \geqq 0$

よって　$(a^2+b^2)(x^2+y^2) \geqq (ax+by)^2$

等号成立は　$ay=bx$　のとき

(2)　$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=a^2-(b+c)a+b^2-bc+c^2$

$=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2-\left(\dfrac{b+c}{2}\right)^2+b^2-bc+c^2=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(b^2-2bc+c^2)$

$=\left(a-\dfrac{b+c}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(b-c)^2 \geqq 0$

よって　$a^2+b^2+c^2 \geqq ab+bc+ca$

等号成立は　$a=\dfrac{b+c}{2}$ かつ $b=c$　つまり　$a=b=c$　のとき

(別解)

$a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ca)$

$=\dfrac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca)$

$=\dfrac{1}{2}\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\}$

$=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}\geqq 0$

よって　$a^2+b^2+c^2\geqq ab+bc+ca$

等号成立は　$a=b=c$　のとき

［2］ $|x+y|\leqq|x|+|y|$ を示す。

$(|x|+|y|)^2-|x+y|^2=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2+2xy+y^2)=2(|xy|-xy)\geqq 0$

よって　$|x+y|^2\leqq(|x|+|y|)^2$

$|x+y|\geqq 0$，$|x|+|y|\geqq 0$ であるから　$|x+y|\leqq|x|+|y|$

次に，$|x|-|y|\leqq|x+y|$ を示す。

(i) $|x|-|y|\geqq 0$ のとき

$|x+y|^2-(|x|-|y|)^2=x^2+2xy+y^2-(x^2-2|x||y|+y^2)=2(|xy|+xy)\geqq 0$

よって　$(|x|-|y|)^2\leqq|x+y|^2$

$|x+y|\geqq 0$，$|x|-|y|\geqq 0$ であるから　$|x|-|y|\leqq|x+y|$

(ii) $|x|-|y|<0$ のとき

$|x+y|\geqq 0$ であるから　$|x|-|y|\leqq|x+y|$

(i)，(ii)より　$|x|-|y|\leqq|x+y|$

したがって　$|x|-|y|\leqq|x+y|\leqq|x|+|y|$

第 2 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：14，ウエ：14，オ：2，カ：2，キ：2，
ク：0

[解説]

$(x^8+y^8)(x^6+y^6)-(x^7+y^7)^2$

$=x^{14}+x^8y^6+x^6y^8+y^{14}-(x^{14}+2x^7y^7+y^{14})$

$=x^8y^6-2x^7y^7+x^6y^8$

$=x^6y^6(x^2-2xy+y^2)$

$=(x^3)^2(y^3)^2(x-y)^2\geqq 0$ [A]

よって　$(x^8+y^8)(x^6+y^6)\geqq(x^7+y^7)^2$

(等号が成り立つのは，

$x=0$ または $y=0$ または $x=y$

のとき。)

[A]　実数 A について
$A^2\geqq 0$
等号が成り立つのは，$A=0$ のとき。

2 **[正解]** ケ：③，コ：③，サ：②，シ：0

[解説]

$$a^2+b^2+c^2-(-ab-bc-ca)$$

$$=a^2+(b+c)a+b^2+bc+c^2$$

$$=\left(\boldsymbol{a+\frac{b+c}{2}}\right)^2-\left(\frac{b+c}{2}\right)^2+b^2+bc+c^2$$

$$=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b^2+\frac{2}{3}bc+c^2\right)$$

$$=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left\{\left(b+\frac{c}{3}\right)^2-\left(\frac{c}{3}\right)^2+c^2\right\}$$

$$=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left\{\left(b+\frac{c}{3}\right)^2+\frac{8}{9}c^2\right\}$$

$$=\left(a+\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(\boldsymbol{b+\frac{c}{3}}\right)^2+\frac{2}{3}\boldsymbol{c}^2\geqq \boldsymbol{0}$$ [B]

よって　$a^2+b^2+c^2\geqq -ab-bc-ca$

(等号が成り立つのは，

$a+\dfrac{b+c}{2}=0$ かつ $b+\dfrac{c}{3}=0$ かつ $c=0$

すなわち $a=b=c=0$ のとき。)

(別解)

$$a^2+b^2+c^2-(-ab-bc-ca)$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca$$

$$=\frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2+2ab+2bc+2ca)$$

$$=\frac{1}{2}\{(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(c^2+2ca+a^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}\geqq 0$$ [B]

よって　$a^2+b^2+c^2\geqq -ab-bc-ca$

(等号が成り立つのは，

$a+b=0$ かつ $b+c=0$ かつ $c+a=0$

すなわち　$a=b=c=0$ のとき。)

[B]　実数 A，B について
$A^2+B^2\geqq 0$
等号が成り立つのは，$A=B=0$ のとき。

3 **[正解]** ス：④，セ：③，ソ：⑦，タ：0，チ：④，
ツ：⑧，テ：0

[解説]

$|x-y| \leqq |x|+|y|$ を示す。

$(|x|+|y|)^2-|x-y|^2$

$=|x|^2+2|x||y|+|y|^2-(x^2-2xy+y^2)$ [C]

$=x^2+2|x||y|+y^2-(x^2-2xy+y^2)$

$=2|x||y|+2xy$

$=2(|xy|+xy) \geqq 0$ [D]

よって　$|x-y|^2 \leqq (|x|+|y|)^2$

$|x-y| \geqq 0$，$|x|+|y| \geqq 0$ であるから

$|x-y| \leqq |x|+|y|$ [E]

次に，$|x|-|y| \leqq |x-y|$ を示す。

(i)　$|x|-|y| \geqq 0$ のとき

$|x-y|^2-(|x|-|y|)^2$

$=(x^2-2xy+y^2)-(|x|^2-2|x||y|+|y|^2)$

$=2|x||y|-2xy$

$=2(|xy|-xy) \geqq 0$ [F]

よって　$(|x|-|y|)^2 \leqq |x-y|^2$

$|x|-|y| \geqq 0$，$|x-y| \geqq 0$ であるから

$|x|-|y| \leqq |x-y|$

(ii)　$|x|-|y|<0$ のとき

$|x-y| \geqq 0$ であるから　$|x|-|y|<|x-y|$

(i)，(ii)より　$|x|-|y| \leqq |x-y|$

以上から　$|x|-|y| \leqq |x-y| \leqq |x|+|y|$

[C]　$|A|^2=A^2$

[D]　$A>0$ のとき　$|A|>-A$
$A \leqq 0$ のとき　$|A|=-A$
よって　$|A| \geqq -A$
すなわち　$|A|+A \geqq 0$

[E]　$A \geqq 0$，$B \geqq 0$ のとき
$A \geqq B \Longleftrightarrow A^2 \geqq B^2$

[F]　$A \geqq 0$ のとき　$|A|=A$
$A<0$ のとき　$|A|>A$
よって　$|A| \geqq A$
すなわち　$|A|-A \geqq 0$